ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ОД ПРВ РЕД
Се дефинира парцијален извод на функција со повеке променливи и негово геометриско толкување. Partial derivatives of a function of two or more variables is defined and their geometric significance.

Нека функцијата $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е дефинирана во околина на точката $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Дефиниција.

Разликата

$$\Delta x_k = x_k - a_k$$

се нарекува **нараснување на променливата** x_k, а разликата

$$\Delta_k f(A) = f(a_1, \ldots, a_k + \Delta x_k, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$$

парцијално нараснување на функцијата f во точката A по променливата x_k.

Дефиниција.

Ако постои граничната вредност

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(A)}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_k + \Delta x_k, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)}{\Delta x_k}$$

таа се нарекува **парцијален извод** на функцијата f по променливата x_k во точката A и се означува со

$\frac{\partial f(A)}{\partial x_k}$ или $f_{x_k}^{'}(A)$ или $\frac{\partial z(A)}{\partial x_k}$ или $z_{x_k}^{'}$.

Изразот $\frac{\partial f(A)}{\partial x_k}$ скратено ја означува вредноста на изводот во дадена точка $\frac{\partial f(X)}{\partial x_k} \mid_{X=A}$.

За функција со две променливи $z = f(x, y)$ се дефинираат два парцијални извода, по секоја независна променлива. Нека $A(x_0, y_0)$ е точка од дефиниционата област на функцијата $f(x, y)$ и нека Δx и Δy се соодветните нараснувања на променливите x и y.

Дефиниција.

Парцијален извод по променливата *x* за фунцијата $f(x,y)$ во точката $A(x_0,y_0)$ е граничната вредност

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Аналогно,

Дефиниција.

Парцијален извод по променливата y з а фунцијата $f(x,y)$ во точката $A(x_0, y_0)$ е граничната вредност

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

Парцијалните изводи $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ на функцијата $f(x,y)$ обично се пресметуваат во произволна точка $X(x,y)$ од дефиниционата област. Кога се бара парцијалниот извод по променливата x, промелнливата y се смета за константа и обратно.

Парцијалните изводи се означуваат со некоја од ознаките:

парцијален извод по x : $f_x^{'}(x,y),f_x^{'},z_x^{'},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x}$;

парцијален извод по y : $f_y^{'}(x,y),f_y^{'},z_y^{'},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пример 1. Да се најдат парцијалните изводи на функцијата $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

Решение. Зададената функција е функција од две независни променливи и затоа ќе има два парцијални извода по секоја променлива. Се пресметува парцијалниот извод по променливата x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)_{x'}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right)\cdot\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)-\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2}=$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right) \cdot \frac{\frac{\left(x-\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)-\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right) \cdot \frac{x^2-x^2-y^2-\left(x^2+y^2-x^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2} =$$

$$= \frac{-2\mathrm{y}^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} == \frac{-2\mathrm{y}^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2-x^2)} = \frac{-2\mathrm{y}^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

од каде следува дека $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Сега се пресметува и парцијалниот извод по променливата y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}} \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)_{y'} = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right) \cdot \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)-\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right) \cdot \frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)-y\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2} =$$

$$= \frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x-\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} = \frac{2\mathrm{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2-x^2)} = \frac{2\mathrm{xy}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2\mathrm{x}}{y\sqrt{x^2+y^2}},$$

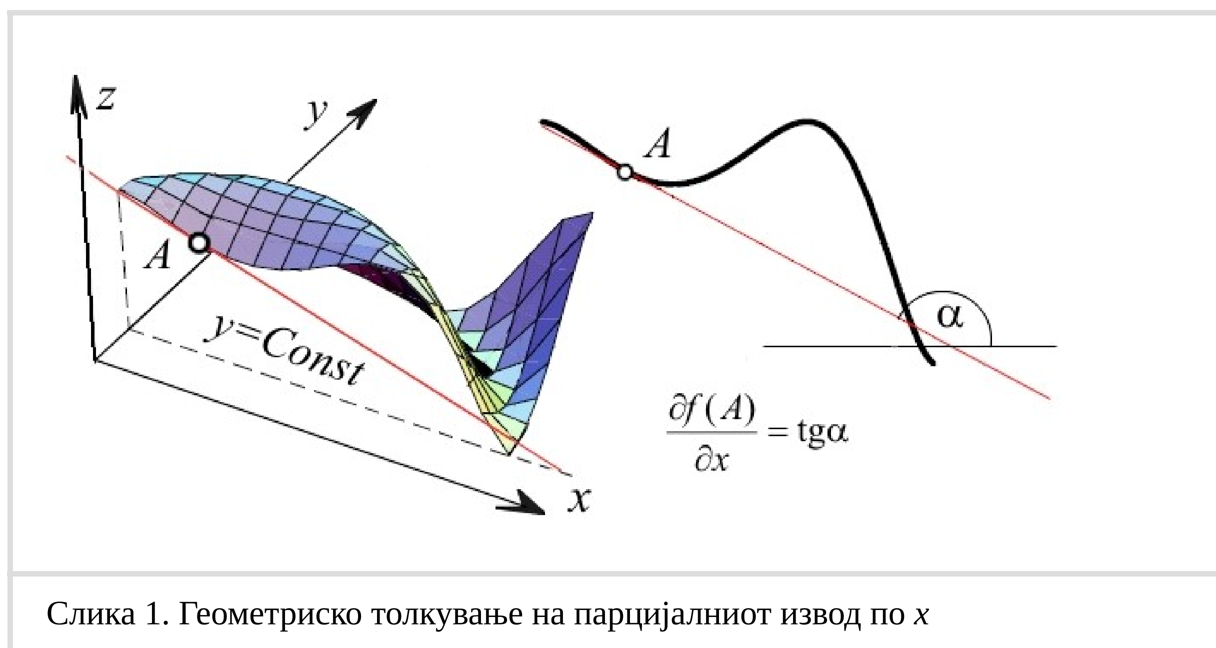
и се добива $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2\mathrm{x}}{y\sqrt{x^2+y^2}}$. ◄

Од важност се следните тврдења:

- (*Потребни услови за диференцијабилност*) Ако функција $z = f(x,y)$ е диференцијабилна во дадена точка, тогаш постојат сите парцијални изводи во таа точка.
- (*Доволен услов за диференцијабилност*) Ако функција $z = f(x,y)$ во околина на дадена точка има непрекинати парцијални изводи по секоја променлива, тогаш таа е диференцијабилна во таа точка.
- Ако функцијата $z = f(x,y)$ е диференцијабилна во дадена точка, тогаш таа е непрекината во таа точка.

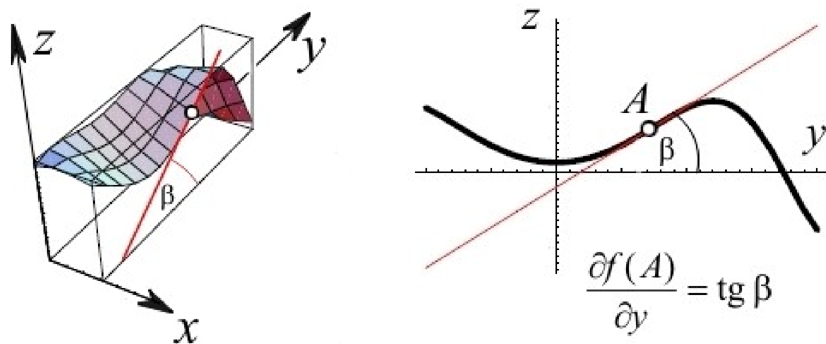
Геометриско толкување на парцијалнте изводи на функција од две променливи

Нека го разгледуваме делот од графикот на диференцијабилната функција $z = f(x,y)$ во точката $A(x_0,y_0) \in D_f$. Ако во функцијата $f(x,y)$ променливата y се фиксира со константна вредност y_0,тогаш таа се смета за функција со една променлива x, односно $\phi(x) = f(x,y_0)$, а нејзиниот график претставува крива која се добива како пресек на разгледуваниот дел од површината и рамнината $y = \mathrm{const} = y_0$.



Слика 1. Геометриско толкување на парцијалниот извод по *x*

Наклонот на тангентата $\mathrm{tg}\alpha$ на оваа крива во точката A во однос на позитивната насока на x −оската е парцијалниот извод (Сл. 1) $f_x^{'}(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha$.



Слика 2. Геометриско толкување на парцијалниот извод по y

Аналогно, со фиксирање на $x = x_0$, функцијата $z = f(x,y)$ се сведува на функција со една променлива y, односно $\psi(y) = f(x_0,y)$, а наклонот на тангентата на оваа крива која лежи во рамнината $x = x_0$ е парцијалниот извод (Сл. 2)
$f_y^{'}(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial y} = \mathrm{tg}\beta$.

ТОТАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛ
Се дефинира парцијален и тотален диференцијал и негово користење за приближно пресметување на функција во блиска околина на дадена точка. Definition of partial and total differential.

Тотален диференцијал

Нека е дадена функцијата $z = f(x,y)$и нека Δx и Δy се соодветните нараснувања на променливите x и y.

Дефиниција

Производот $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x = d_x f$ се нарекува **парцијален диференцијал** на функцијата f по променливатаx, а производот $\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = d_y f$ се нарекува **парцијален диференцијал** на функцијата f по променливата y.

Бидејќи $\Delta x = \mathrm{dx}$ и $\Delta y = \mathrm{dy}$, парцијалните диференцијали се запишуваат како

$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx}$ и $d_y f = \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy}$.

Дефиниција

Сумата на парцијалните диференцијали

$$\mathrm{df} = d_x f + d_y f$$

или

$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy}$$

се нарекува **тотален диференцијал** на функцијата $z = f(x,y)$.

Пример 2

Да се определат парцијалните диференцијали и тоталниот диференцијал на функцијата $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

Решение

Најпрво ги пресметуваме парцијалните изводи:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Парцијалните диференцијали се:

$$d_x f = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\mathrm{dx}$$

и

$$d_y f = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\mathrm{dy},$$

а тоталниот диференцијал е

$$\mathrm{df} = \frac{y\mathrm{dx}-x\mathrm{dy}}{y\sqrt{y^2-x^2}}. \blacktriangleleft$$

Дефиниција

Разликата $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ се нарекува **тотално** или **вистинско нараснување** на функцијата f во точката $A(x,y)$.

За мали промени на вредностите на аргументите на функцијата $z = f(x,y)$, односно кога $\Delta x \approx 0$ и $\Delta y \approx 0$, вистинското нараснување на функцијата може приближно да се пресмета преку диференцијалот, односно $\Delta f \approx \mathrm{df}$. Бидејќи

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y),$$

тогаш

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x,y) + \mathrm{df}.$$

Оваа релација овозможува приближно пресметување на вредноста на функцијата во близина на дадена точка, во која вредноста на функцијата лесно може да се пресмета.

Пример 3

Со помош на тотален диференцијал приближно да се пресмета

$$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right).$$

Решение

Според обликот на дадениот израз чија вредност треба да се пресмета, определуваме функција од две променливи

$$z = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right).$$

Во оваа функција вредноста 1,03 која е блиска до 1, се доделува на првата независна променлива која се запишува како $x + \Delta x = 1{,}03$ при што $x = 1$, а нараснувањето е $\Delta x = 0{,}03 \approx 0$. Исто така, втората вредност 0,98 се доделува на втората независна променлива и таа се запишува како $y + \Delta y = 0{,}98$ и оваа вредност е во околина на точката на $y = 1$, а нараснувањето е $\Delta y = -0{,}02 \approx 0$.

Применувајќи ја формулата за приближно пресметување со тотален диференцијал, се добива

$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)\approx\ln\left(\sqrt[3]{1^3}+\sqrt[4]{1}-1\right)+\mathrm{dz}\mid_{x=1,y=1}.$

Вредноста на функцијата $f(x,y)$ во точката (1,1) е

$f(x,y)\mid_{x=1,y=1}=\ln\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1\right)=\ln 1=0,$

додека за пресметување на вредноста на тоталниот диференцијал треба да се пресметаат парцијалните изводи. Парцијалните изводи на функцијата се:

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

Equation:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}$$

и нивните вредности во точката $(1,1)$ се

$\frac{\partial z}{\partial x}\mid_{x=1,y=1}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\frac{1}{3},$

$\frac{\partial z}{\partial y}\mid_{x=1,y=1}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1}\cdot\frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}}=\frac{1}{4}.$

Тоталниот дифренцијал ќе има вредност

$\mathrm{dz}=\frac{1}{3}\Delta x+\frac{1}{4}\Delta y=\frac{0{,}03}{3}+\frac{-0{,}02}{4}=0{,}01-0{,}005=0{,}005,$

и заменувајќи ги пресметаните вредности во изразот

Equation:

$$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)\approx\ln\left(\sqrt[3]{1^3}+\sqrt[4]{1}-1\right)+\mathrm{dz}\mid_{x=1,y=1}$$

се добива дека

$$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)\approx 0{,}005.$$ ◄

ТАНГЕНТНА РАМНИНА И НОРМАЛА
Дадени се равенките на тангентната рамнина и нормалата на површина во дадена точка од кривата преку нормалниот вектор. The equations of the tangent plane and the normal line at point of a plane in tree dimensional space are given using the normal vector.

Ќе ги определиме равенките на тангентната рамнина и нормалата на површината $f(x,y)$ во нејзината точка $A(x_0,y_0,z_0)$ ако површината е глатка, т. е. функцијата и нејзините парцијални изводи постојат во таа точка $(f(x_0,y_0) \neq \infty, f_x^{'}(x_0,y_0) \neq \infty, f_y^{'}(x_0,y_0) \neq \infty)$.

Најпрво се дефинира нормален вектор на површина во дадена точка.

Дефиниција.

Векторот

$$\vec{n} = \left\{ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, -1 \right\}$$

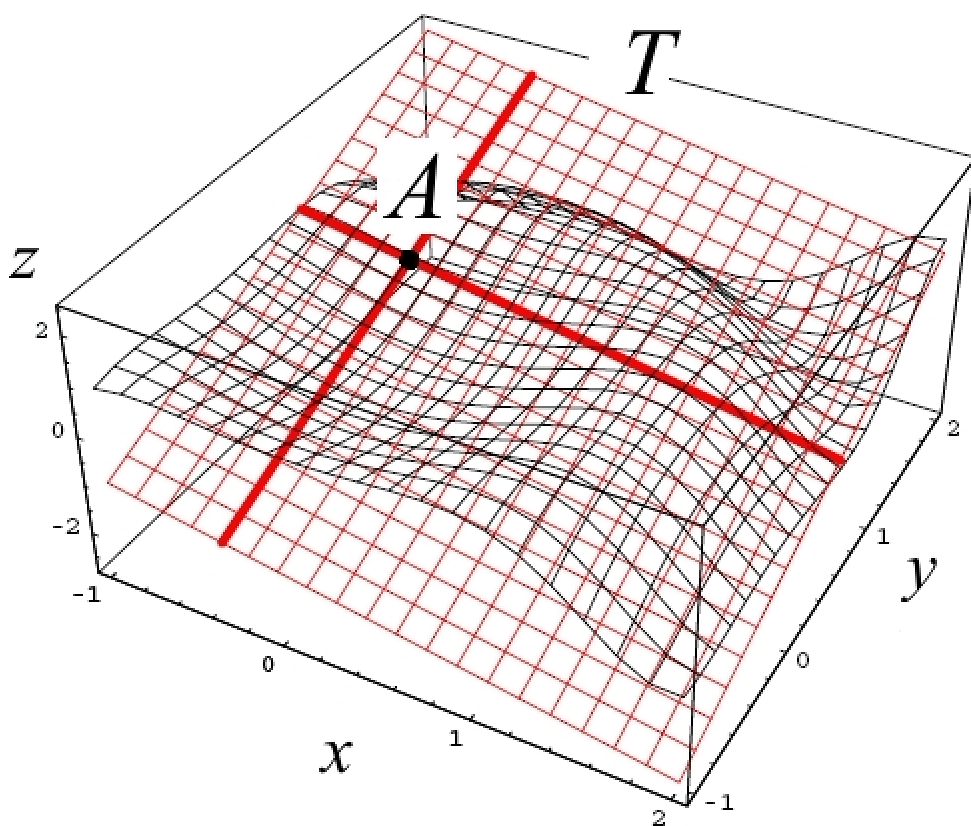
е **нормален вектор** на површината $f(x,y)$ во точката $A(x_0,y_0,z_0)$.

Ако површината е зададена во имплицитен облик $F(x,y,z) = 0$, тогаш нормалниот вектор во точката е $A(x_0,y_0,z_0)$ е

$$\vec{n} = \left\{ \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \right\}.$$

Тангентна рамнина

Тангентна рамнина на површина е рамнина која ја допира површината во една точка (Сл. 1).



Слика 1. Тангентна рамнина на површината $f(x,y)$ во точката A

Равенката на **тангентна рамнина** на површината $f(x,y)$ во точката $A(x_0,y_0,z_0)$ од дадената површина е

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

или

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0).$$

Тангентната рамнина се добива како равенка на рамнина низ дадена точка од површината и е нормална на векторот $\vec{n}$ (дел од аналитичка геометрија; точка-нормала облик равенка на рамнина.)

Ако површината е зададена со имплицитната равенка $F(x,y,z)=0$, тангентната рамнина ќе има равенка

$$\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

Нормала

Нормала низ точката $A(x_0,y_0,z_0)$ е права која минува низ таа точка и е нормална на тангентната рамнина.

Равенката на **нормалата** на површината $f(x,y)$ во точката $A(x_0,y_0,z_0)$ се добива преку формулата за равенка на права низ точка $A(x_0,y_0,z_0)$ паралелна со векторот$\vec{n}$:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

За површина зададена со имплицитната равенка $F(x,y,z)=0$, равенката на нормалата е

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}.$$

Пример 1. Да се напише равенката на тангентната рамнина на елипсоидот $x^2+2\mathrm{y}^2+z^2=1$ која е паралелна со рамнината $x-y+2\mathrm{z}=0$.

Решение. Бидејќи елипсоидот е зададен со равенка во имплицитен облик, парцијалните изводи се $F_x^{'}=2\mathrm{x},F_y^{'}=4\mathrm{y},F_z^{'}=2\mathrm{z}$, а тангентната рамнина ќе биде од обликот

$$2\mathrm{x}_0(x-x_0)+4\mathrm{y}_0(y-y_0)+2\mathrm{z}_0(z-z_0)=0.$$

Точката $A(x_0,y_0,z_0)$ во која треба да се повлече тангентната рамнина не се знае и таа ќе се определи од условот за паралелност на две рамнини (тангентната рамнина и дадената рамнина $x-y+2\mathrm{z}=0$)

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{-1} = \frac{2z_0}{2}$$

и условот точката да лежи на елипсоидот

$$x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Овие услови го даваат следниот системот равенки

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{-1}$$

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{2z_0}{2}$$

$$x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$$

односно ситемот

$$-\frac{1}{2}x_0 = y_0$$
$$2x_0 = z_0$$

$$x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Со замена на првите две равенки во третата равенка се добива квадратната равенка

$$x_0^2 + 2\left(\frac{-x_0}{2}\right)^2 + (2x_0)^2 = 1$$

чии решенија се

$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}, y_0 = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, z_0 = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}},$$

а тоа значи дека постојат две точки на елипсоидот

$$A_1\left(\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$$

и

$$A_2\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, -2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$$

во кои тангентните рамнини се паралелни со дадената рамнина, односно постојат две тангентни рамнини.

Равенките на бараните тангентни рамнини се:

Во точката $A_1\left(\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ тангентната рамнина е $x - y + 2\text{z} = \sqrt{\frac{11}{2}}$,

а во точката $A_2\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, -2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ тангентната рамнина е $x - y + 2\text{z} = -\sqrt{\frac{11}{2}}$. ◄

ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ОД ИМПЛИЦИТНА И СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА
Се определуваат парцијалните изводи на имлицитно зададена функција и сложена функција. The partial derivatives of an implicit and a compound function are given.

Парцијални изводи од имплицитна функција

Нека е зададена функција со две независно променливи x и y во имплицитен облик $F(x,y,z)=0$, односно нерешлива по функцијата z. Барањето парцијални изводи се врши со диференцирање на имплицитната равенка по соодветната променлива, водејќи сметка дека $z(x,y)$ е функција, па секогаш кога се диференцира по функцијата z изразот ќе се помножи со парцијалниот извод на z по соодветната променлива.

Со диференцирање на имплицитната функција $F(x,y,z)=0$ по променливата x

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z)=0$$

се добива

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

односно **парцијалниот извод на имплицитната функција по промеливата *x*** е

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}.$$

Аналогно, **парцијалниот извод на имплицитната функција по промеливата *y*** е

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}.$$

Пример 1. Да се најдат парцијалните изводи $\frac{\partial z}{\partial x} u \frac{\partial z}{\partial y}$ на имплицитната функција $x^2 y - 3\text{xyz} + e^z = 0$.

Решение. Најпрво се диференцира имплицитната функција $x^2 y - 3\text{xyz} + e^z = 0$ по променливата x

$$2\text{xy} - 3\text{yz} - 3\text{xy}\frac{\partial z}{\partial x} + e^z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

и се добива

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3\text{yz} - 2\text{xy}}{e^z - 3\text{xy}}.$$

Аналогно, со диференцирање на функцијата по y се добива

$$x^2 - 3\text{xz} - 3\text{xy}\frac{\partial z}{\partial y} + e^z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

од каде

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3\text{xz} - x^2}{e^z - 3\text{xy}}.$$ ◀

Парцијални изводи од сложена функција

Ако во функцијата со две променливи $z = f(x,y)$ секоја од променливите е функција од нова променлива t, односно $x = x(t)$ и $y = y(t)$, тогаш $z = f(x(t),y(t))$ е функција од една променлива t. За ваквата функција се вели дека е сложена функција која зависи од една променлива t посредно преку двете променливи x и y. Ако функциите $x = x(t)$ и $y = y(t)$ се диференцијабилни по променливата t и функцијата z е диференцијабилна по променливите x и y, тогаш **изводот на сложената функцијата *z*** е

$$\frac{\text{dz}}{\text{dt}} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\text{dx}}{\text{dt}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\text{dy}}{\text{dt}}.$$

Пример 2. Да се пресмета изводот на функцијата $z = 3\text{cos}x - \text{sinxy},\text{ako}x = 1/t,y = 3\text{t}.$

Решение. Се пресметуваат сите изводи:

$\frac{\partial z}{\partial x} = -3\sin x - y\cos xy, \frac{\partial z}{\partial y} = -x\cos xy, \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 3.$

Заменувајќи ги овие изводи во изразот за изводот $\frac{dz}{dt}$ се добива

$\frac{dz}{dt} = (-3\sin x - y\cos xy)\left(-\frac{1}{t^2}\right) + (-x\cos xy)3$

и по заменувањето со $x = 1/tuy = 3t$

$\frac{dz}{dt} = \frac{3}{t^2}\sin\frac{1}{t}$. ◀

Кога во функцијата со две променливи $z = f(x,y)$ секоја од променливите x и y е функција од други две променливи u и v, односно $x = x(u,v), y = y(u,v)$, тогаш

$z = f(x(u,v), y(u,v))$

е функција од две променливи. Ако функцијата z и нејзините компоненти x и y се диференцијабилни функции, тогаш **парцијалните изводи на сложената функцијата** z по променливите u и v се

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

u

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пример 3. Да се најдат парцијалните изводи $\frac{\partial z}{\partial u} i \frac{\partial z}{\partial v}$ ако $z = e^{x^2 y}$; $x = \sqrt{uv}, y = 1/v$.

Решение. Парцијалниот извод по u е

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \left(2xye^{x^2 y}\right)\left(\frac{v}{2\sqrt{uv}}\right) + \left(x^2 e^{x^2 y}\right)0 =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{uv}}{v} e^{\frac{uv}{v}}\right)\left(\frac{v}{2\sqrt{uv}}\right) = e^u,$$

а парцијалниот извод по v е

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \left(2\mathrm{xye}^{x^2y}\right)\left(\frac{u}{2\sqrt{\mathrm{uv}}}\right) + \left(x^2e^{x^2y}\right)\frac{-1}{v^2} =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{\mathrm{uv}}}{v}e^{\frac{\mathrm{uv}}{v}}\right)\left(\frac{u}{2\sqrt{\mathrm{uv}}}\right) - \frac{\mathrm{uv}}{v^2}e^{\frac{\mathrm{uv}}{v}} = \frac{u}{v}e^u - \frac{u}{v}e^u = 0. \blacktriangleleft$$

ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ОД ПОВИСОК РЕД
Се дефинираат парцијални изводи и диференцијал од повисок ред.
Partial derivatives and differential of second and high order are defined.

Првите парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_k},(i=1,2,\ldots,n)$ на функцијата $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ се исто така функции од n променливи $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и од нив пак може да се бараат изводи. На пример, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ е извод по променливата x_i кога изводот се бара од првиот извод по променливата x_k.

Изводите од првите парцијални изводи $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ се нарекуваат **парцијални изводи од втор ред**.

Изводите за $i \neq k$ се нарекуваат **мешани изводи**.

За функција од две променливи $f(x,y)$ може да најдат следните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{\mathrm{xx}}^{''},\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{\mathrm{yx}}^{''},\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f_{\mathrm{xy}}^{''},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{\mathrm{yy}}^{''}.$$

Условот под кој мешаните изводи се еднакви е даден со следното тврдење:

Теорема.

Ако функцијата$f(x,y)$ заедно со нејзините први парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ и мешаните парцијални изводи$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ се непрекинати во околина $K(A,\varepsilon)$ на точката $A(x,y)$,тогаш мешаните изводи во таа точка се еднакви, т.е. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Затоа функцијата две променливи $f(x,y)$ ќе има три втори парцијални изводи: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{\mathrm{xx}}^{''},\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{\mathrm{yx}}^{''},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{\mathrm{yy}}^{''}$.

Согласно на теоремата за еднаквост на мешаните изводи, непрекината функција од две променливи $f(x,y)$ има четири трети изводи:

$f_{\mathrm{xxx}}^{'''},, f_{\mathrm{yxx}}^{'''}, f_{\mathrm{yyx}}^{'''}, f_{\mathrm{yyy}}^{'''}$

заради еднаквоста намешаните изводи $f_{\mathrm{yxx}}^{'''} = f_{\mathrm{xyx}}^{'''} = f_{\mathrm{xxy}}^{'''}$ и $f_{\mathrm{yyx}}^{'''} = f_{\mathrm{yxy}}^{'''} = f_{\mathrm{xyy}}^{'''}$.

Пример 1.

Да се најдат вторите изводи на функцијата $z = x^3 + 5\mathrm{x}^2 y - \mathrm{xy}^3 + 3$.

Решение. Првите парцијални изводи се:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\mathrm{x}^2 + 10\mathrm{xy} - y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{xy}^2 .$$

Вторите парцијални изводи се:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3\mathrm{x}^2 + 10\mathrm{xy} - y^3\right) = 6\mathrm{x} + 10y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3\mathrm{x}^2 + 10\mathrm{xy} - y^3\right) = 10x - 3\mathrm{y}^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{xy}^2\right) = -6\mathrm{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{xy}^2\right) = 10x - 3\mathrm{y}^2 .$$

Како што се гледа од наведениот пример, мешаните изводи се еднакви $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 10x - 3\mathrm{y}^2$, бидејки и функцијата и нејзините изводи од прв ред и мешаните изводи од втор ред како полиномни функции се непрекинати функции во секоја точка. ◄

Пример 2.

Да се покаже дека за функцијата $z = \ln(e^x + e^y)$ важат релациите

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1u \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Решение. Најпрво ги определуваме првите парцијални изводи:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^x+e^y}(e^x + e^y)'_x = \frac{e^x}{e^x+e^y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^x+e^y}(e^x + e^y)'_y = \frac{e^y}{e^x+e^y}.$$

Сумата на првите парцијални изводи е

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y} + \frac{e^x}{e^x+e^y} = \frac{e^x+e^y}{e^x+e^y} = 1.$$

Вторите парцијални изводи се:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^x(e^x+e^y)-e^x e^x}{(e^x+e^y)^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^y(e^x+e^y)-e^y e^y}{(e^x+e^y)^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{e^y}{e^x+e^y}\right)'_x = \frac{-e^y e^x}{(e^x+e^y)^2}.$$

Бараната релација со вторите парцијални изводи е

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2} \frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2} - \left[\frac{-e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}\right]^2 - \left[\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}\right]^2 = 0,$$

што требаше да се докаже. ◄

Општо, за функција од *n* променливи, бројот на парцијани изводи од ред *m* е даден со формулата за комбинации без повторување $\bar{C}_n^m = \binom{n+m-1}{m}$. Затоа функцијата од две променливи ќе има $m+1$ парцијални изводи од ред m. Тоа се трите втори изводи

$f_{\mathrm{xx}}^{''}, f_{\mathrm{yx}}^{''}, f_{\mathrm{yy}}^{''}$

четирите трети изводи

$f_{\mathrm{xxx}}^{'''}, f_{\mathrm{yxx}}^{'''}, f_{\mathrm{yyx}}^{'''}, f_{\mathrm{yyy}}^{'''}$, и т.н.

Диференцијал од повисок ред

Тоталниот диференцијал од прв ред за функција од две променливи $f(x,y)$ беше даден со релацијата $\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy}$. Ако се побара диференцијал од првиот диференцијал се добива вториот диференцијал

$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy}\right) =$

$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{dy}\right)\mathrm{dy} =$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{dx}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{dxdy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{dy}^2.$

Заначи **втор диференцијал** е изразот
Equation:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{dx}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{dxdy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{dy}^2$$

или накусо запишан како бином на квадрат преку релацијата
Equation:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{dy} \right)^2 f.$$

Последниот израз овозможува накусо запишување на **диференцијал од ред k** за функција со две променливи преку изразот за бином на степен *k*

Equation:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{dy} \right)^k f.$$

ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈА ОД ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ
За функција од две промелниви се даваат потребните и доволните услови за релативен екстрем (минимум или максимум) во дадена стационарна точка. The first and second partial test for relative extreme (minimum or maximum) for function of two variables are given.

Ќе прикажеме уште една примена на парцијалните изводи на функција од две променливи: определување на локалните екстреми на функција.

Нека $z = f(x,y)$ е функција дефинирана во ε $-$околина на точката $M(a,b)$. Точката M е

- **точка на локален минимум** ако $f(x,y) > f(a,b), \forall (x,y) \in K(M,\varepsilon) \cap D_f$;
- **точка на локален максимум** ако $f(x,y) < f(a,b), \forall (x,y) \in K(M,\varepsilon) \cap D_f$.

Локалнитот минимум и максимум се нарекуваат **локални екстреми** на функцијата. Најмалиот локален минимум (максимум) во разгледуваната област се нарекува **глобален минимум (максимум)** во таа област.

Потребен услов за локален екстрем:

Ако функцијата$f(x,y)$ има локален екстрем во точката $M(a,b)$, тогаш сите парцијални изводи од прв ред во точкатаM се еднакви на нула

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0 u \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$$

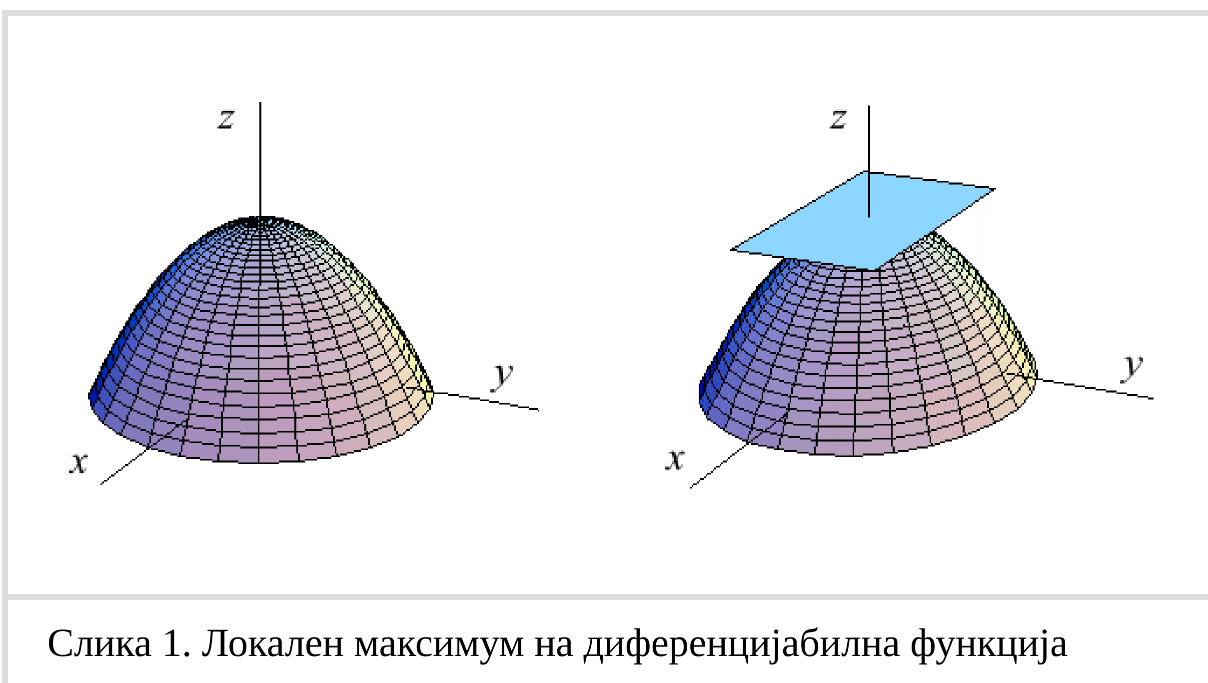
или тие не постојат.

Пример 1.

Функцијата $z = 1 - x^2 - y^2$ има локален максимум во точката $M(0,0)$ (Слика 1). Во таа точка функцијата е диференцијабилна и исполент е потребниот услов за локален екстрем

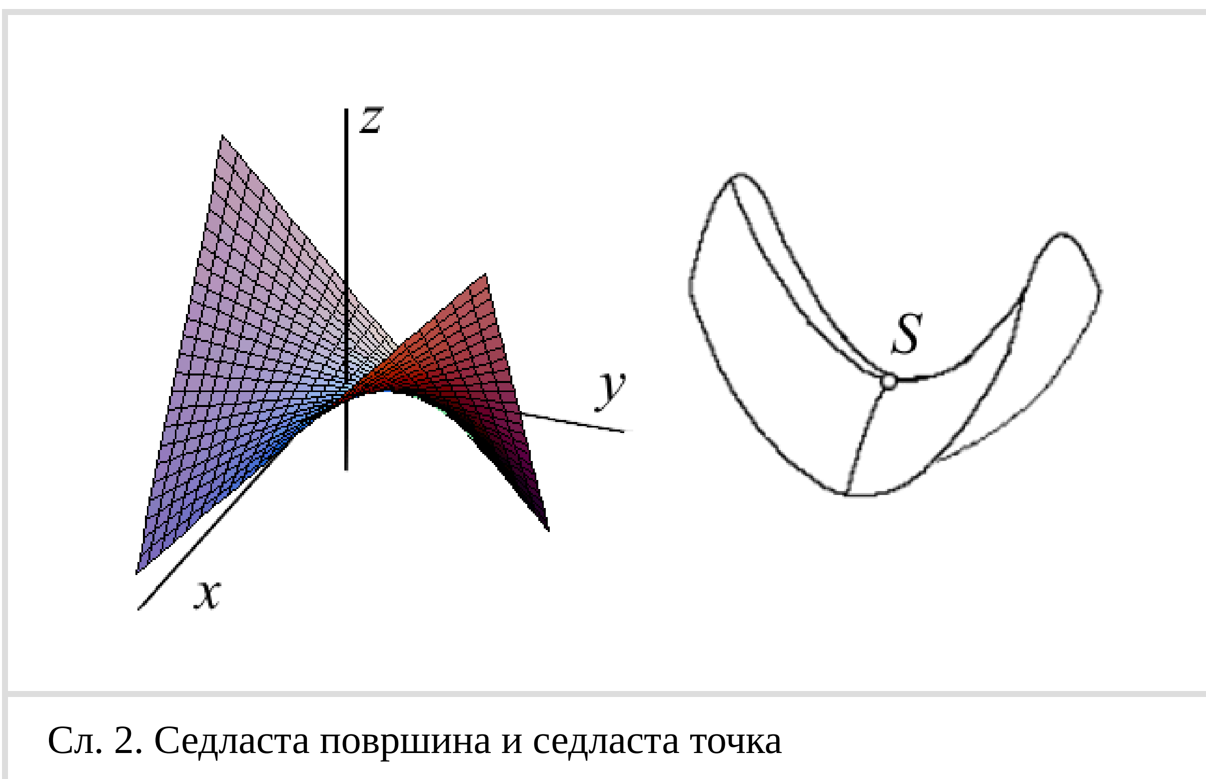
$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = -2\text{x}/_{(0,0)}0$

$\frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = -2\text{y}/_{(0,0)}0.$



Слика 1. Локален максимум на диференцијабилна функција

Условот парцијалните изводи од прв ред да се еднакви на нула во точка не е доволен за постоење на локален екстрем во таа точка. На пример, *хиперболичниот параболоид* чија равенка е $z = \text{xy}$ (Сл. 2) и за кој парцијалните изводи од прв ред во координатниот почеток се еднакви на нула, $z_x^{'}(0,0) = z_y^{'}(0,0) = 0$, нема екстрем во координатниот почеток и ваквата точка се нарекува **седласта точка**.



Сл. 2. Седласта површина и седласта точка

Точката $M(a,b)$ која заедно со својата ε −околина припаѓа на областа на дефинираност на функцијата$f(x,y)$ за која $f_x^{'}(a,b) = 0, f_y^{'}(a,b) = 0$ се нарекува **стационарна точка** за функцијата f. Значи потребен услов за постоење на локален екстрем во дадена точка е таа да е стационарна точка.

За вредностите на вторите парцијални изводи во точката $M(a,b)$ се воведуваат следните ознаки:
Equation:

$$A = f_{\text{xx}}^{''}(a,b), B = f_{\text{xy}}^{''}(a,b), C = f_{\text{yy}}^{''}(a,b), D = \text{AC} - B^2.$$

Доволен услов за локален екстрем:

Ако точката $M(a,b)$ е стационарна точка за функцијата$f(x,y)$ и ако

1^0	$D > 0, A < 0$	fима локален максимум во точката $M(a,b)$
2^0	$D > 0, A > 0$	fима локален минимум во точката $M(a,b)$
3^0	$D < 0$	$M(a,b)$ е седласта точка на функцијата f(не постои локлаен екстрем во таа точка)
4^0	$D = 0$	Егзистенцијата на локалниот екстрем е неизвесна и потребни се дополнителни испитувања.

Пример 2.

Да се најдат локалните екстремните вредности на функцијата $f(x,y) = \mathrm{xy}(x + y - 1)$.

Решение. Потребниот услов за локален екстрем (постоење на стационарни точки) се определуваат од ситемот равенки

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(2\mathrm{x} + y - 1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(x + 2\mathrm{y} - 1).$$

Решението на системот ги дава четирите стационарни точки на функцијата: $M_1(0,0), M_2(0,1), M_3(1,0), M_4(1/3, 1/3)$.

Во точките M_1, M_2, M_3 не постои екстрем бидејќи во нив $D = -1 < 0$.

Во точката M_4се добива дека $D = 3/9 > 0, A = 2/3 > 0$ и таа е точка на локален минимум во која вредноста на функцијата е $f_{\min} = f(1/3, 1/3) = -1/27$. ◄